

Uma Abordagem Determinística e Estocástica na Mensuração das Provisões para Sinistros

Maysa Pereira de Souza Santos

Trabalho de projecto apresentado como requisito parcial
para obtenção do grau de Mestre em Estatística e Gestão de
Informação

NOVA Information Management School
Instituto Superior de Estatística e Gestão de Informação
Universidade Nova de Lisboa

UMA ABORDAGEM DETERMINÍSTICA E ESTOCÁSTICA NA MENSURAÇÃO DAS PROVISÕES PARA SINISTROS

por

Maysa Pereira de Souza Santos

Trabalho de projecto apresentado como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em
Estatística e Gestão de Informação, Especialização em Análise e Gestão de Informação

Orientador: Professora Doutora Maria de Lourdes Belchior Afonso

Julho 2021

AGRADECIMENTOS

À minha orientadora, Prof.^a Doutora Maria de Lourdes Belchior Afonso, pela disponibilidade e conhecimento partilhado, além das imprescindíveis sugestões e críticas.

À minha família não só pelo imenso apoio e compreensão, mas também paciência e incentivo durante todo o mestrado.

A todas as pessoas que não mencionei, mas que de alguma forma colaboraram para a realização desse projecto.

RESUMO

Representando um instrumento fundamental de gestão de risco e correspondendo ao passivo maioritário da seguradora, as provisões técnicas têm impacto direto na solvência das empresas, comprometendo, por exemplo, o volume de impostos a pagar e a análise das demonstrações financeiras em situações de fusões e aquisições. Entre as provisões técnicas existentes, este estudo abrangerá as provisões para sinistros, as quais são de grande relevância para os ramos de seguro não vida. Para calcular essas provisões podem ser usados modelos determinísticos ou modelos estocásticos. O objetivo é estimar e analisar os valores das provisões para sinistros, do Ramo Automóvel, de uma Seguradora do mercado português, utilizando, para tal, dados de um horizonte temporal de 20 anos, através de metodologias determinísticas e estocásticas e, com isso, responder à questão principal do estudo: está a Seguradora a provisionar corretamente os sinistros que estão declarados e não estão totalmente regularizados e os sinistros que ocorrerem e não foram declarados?

PALAVRAS-CHAVE

Provisão para sinistro; *Chain Ladder*; *Thomas Mack*; Bootstrap; Bornhuetter-Ferguson

ABSTRACT

Representing a fundamental risk management instrument and corresponding to the majority liability of the insurance company, technical provisions have a direct impact on the solvency of companies, compromising, for example, the volume of taxes payable and the analysis of financial statements in situations of mergers and acquisitions. Among the existing technical provisions, this study will cover provisions for outstanding claims, which are of great relevance for the non-life insurance lines. To calculate these provisions, deterministic models or stochastic models can be used. Therefore, the objective is to estimate and analyse the values of the reserves, of the automobile line of business, of an insurance company in the Portuguese market, using data from a 20-year time horizon, through deterministic and stochastic methodologies and with that answer the main question of the study: is the Insurer correctly provisioning the claims that have been declared and are not fully settled and the claims that have occurred and have not been declared?

KEYWORDS

Claims provision; *Chain Ladder*; *Thomas Mack*; Bootstrap; Bornhuetter-Ferguson

ÍNDICE

1. Introdução	1
2. Revisão de Literatura.....	3
2.1. Provisões Técnicas.....	3
2.2. Solvência II.....	4
2.3. Métodos de Estimação das Provisões	5
3 Metodologia	7
3.1. Métodos de Estimação de Provisão	7
3.1.1. Método de Chain Ladder.....	7
3.1.2. Modelo de Thomas Mack.....	10
3.1.3. Método de Bornhuetter - Ferguson	16
3.1.4. Técnica de Bootstrap.....	18
3.1.5. Factor Cauda.....	20
3.1.6. Inflação	21
3.2. Aplicação Prática	22
3.2.1. Método de Chain Ladder.....	23
3.2.2. Modelo de Thomas Mack.....	25
3.2.3. Método de Bornhuetter – Ferguson	32
3.2.4. Técnica de Bootstrap.....	34
4 Conclusão.....	38
5 Bibliografia.....	41

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1 - Distribuição das Provisões Técnicas do Ramo de Automóvel (2019). Fonte: Elaboração própria com base nos dados da ASF.....	4
Figura 2 - Matriz de montantes pagos incrementais	9
Figura 3 - Taxa de Inflação em Portugal. Fonte: Elaboração própria com base nos dados de INE.	22
Figura 4 - Análise Gráfica de Regressão	25
Figura 5 - Resíduos Ponderados	30
Figura 6 - Ajuste do modelo aos dados	36
Figura 7 - Ajuste da distribuição Log-normal aos dados	37

ÍNDICE DE TABELAS

Tabela 1 - Montantes pagos acumulados	23
Tabela 2 - Estimativa dos factores de desenvolvimento.....	23
Tabela 3 - Montantes acumulados para cada período de ocorrência	24
Tabela 4 - Reserva total estimada	24
Tabela 5 - Matriz de factores de desenvolvimento individuais	26
Tabela 6 - Matriz de número de ordem $r_{i,j}$	26
Tabela 7 - Matriz de número de ordem $s_{i,j}$	27
Tabela 8 - Coeficientes de Correlação de Spearman	27
Tabela 9 - Grupo a que pertence $f_{i,j}$	28
Tabela 10 - Momentos das variáveis Z_j e Z	29
Tabela 11 - Resultados do Modelo de Mack	31
Tabela 12 - Intervalo de Confiança do Modelo Mack	31
Tabela 13 - Prémios Adquiridos	32
Tabela 14 - Taxa de sinistralidade estimada	33
Tabela 15 - Reserva estimada pelo método de Bornhuetter – Ferguson	33
Tabela 16 - Resíduos ajustados de Pearson	34
Tabela 17 - Simulação de Matriz Incremental.....	34
Tabela 18 - Resultados da Técnica de Bootstrap	35
Tabela 19 - Intervalo de Confiança para a Técnica de Bootstrap	35
Tabela 20 - Resultados dos Quantis	36
Tabela 21 - Comparação dos Resultados das Reservas.....	38
Tabela 22 - Comparação dos Intervalos de Confiança	39

1. INTRODUÇÃO

Com a necessidade do indivíduo se resguardar dos riscos a que ele ou suas atividades profissionais, se submetiam houve o surgimento do seguro, onde, através do mutualismo¹ surgiu uma forma de proteger, a nível económico, de possíveis prejuízos a pessoa ou coisa segurada e a terceiros. Dessa forma, o risco é transferido. A Seguradora aceita-o mediante a cobrança de um prémio, que irá garantir, devido ao mutualismo, o ressarcimento da importância segurada em caso de ocorrência de sinistro.

Para garantir uma boa gestão e, conseqüentemente, manter a saúde financeira dessas entidades que passam a assumir um risco, conforme obrigatório por lei, são realizados, entre outros, cálculos dos montantes de obrigações futuras para com os seus clientes, denominadas de provisões técnicas, as quais são dimensionadas por atuários que constituem valores incorporando não somente dados históricos, mas também estimados.

Se as provisões técnicas estiverem superdimensionadas elas comprometem a distribuição de lucros da empresa. Por outro lado, se as provisões técnicas estiverem subdimensionadas, elas podem conduzir à insolvência da empresa (Ferreira e Mano, 2009).

De entre as provisões técnicas existentes, no presente trabalho serão abordadas as provisões para sinistros, de grande relevância nos Ramos Não Vida, e que correspondem ao custo total estimado que a Seguradora terá de suportar para regularizar todos os sinistros, comunicados ou não, que ocorram até o final do exercício, após a dedução dos valores já pagos relativos a esses sinistros.

Para calcular estas provisões existem métodos determinísticos e modelos estocásticos. No primeiro caso, sendo o mais utilizado pela maioria das Seguradoras, é considerado que o padrão observado na informação histórica continuará a ser observado no futuro sem que seja medido o grau de incerteza ou variabilidade dessas estimativas. Já no segundo caso, a

¹ Interação entre indivíduos ou populações, que exercem influências recíprocas em prol do benefício de ambas as partes.

obtenção dessas medidas permite a construção de um intervalo de confiança. Estas provisões podem ser obtidas com o auxílio de *softwares* estatísticos.

Neste contexto está inserido o objetivo geral do trabalho que é estimar e analisar os valores das provisões para sinistros, do Ramo Automóvel, de uma Seguradora do mercado português, utilizando para tal dados de um horizonte temporal de 20 anos, através de metodologias determinísticas e estocásticas.

Com isso, pretende-se responder à questão principal do estudo: está a Seguradora a provisionar corretamente os sinistros que estão declarados e não estão totalmente regularizados e os sinistros que ocorreram e não foram declarados?

A presente tese é constituída por três capítulos principais, a saber: a revisão de literatura, que aborda alguns conceitos preliminares sobre provisões técnicas, a metodologia a qual faz referência tanto à teoria quanto à aplicação prática de todos os métodos e modelos testados e, por último, a conclusão, que permite analisar de forma comparativa os diferentes resultados encontrados no capítulo anterior.

2. REVISÃO DE LITERATURA

2.1. PROVISÕES TÉCNICAS

Representando um instrumento fundamental para a gestão de riscos e correspondendo a maior parte das responsabilidades do setor segurador, as provisões técnicas impactam diretamente na solvência das empresas, comprometendo, por exemplo, o volume de impostos a pagar e as análises das demonstrações financeiras em situações de fusões e aquisições.

De acordo com Gama (2020), de forma simplificada essas provisões representam a reserva financeira que a seguradora precisa manter no seu balanço de modo a cumprir com as obrigações assumidas com os seus segurados e, portanto, o seu adequado dimensionamento é de fundamental importância para a saúde financeira da seguradora.

As provisões técnicas, no mercado segurador português, são regulamentadas pelo Decreto-Lei nº 102/94 de 20 de Abril e pela Norma Regulamentar Nr. 019/1994 de 06/12, e estão divididas em:

- Provisão para prémios não adquiridos;
- Provisão para envelhecimento;
- Provisão para riscos em curso;
- Provisão para participação nos resultados;
- Provisão matemática do ramo Vida;
- Provisão para sinistros;
- Provisão para desvios de sinistralidade.

Todavia, como o objetivo do presente estudo é analisar os dados do Ramo Automóvel e, também, por corresponder a uma grande parcela das provisões técnicas de uma

seguradora, sobretudo do Ramo Não Vida, serão abordadas mais especificamente as provisões para sinistros.

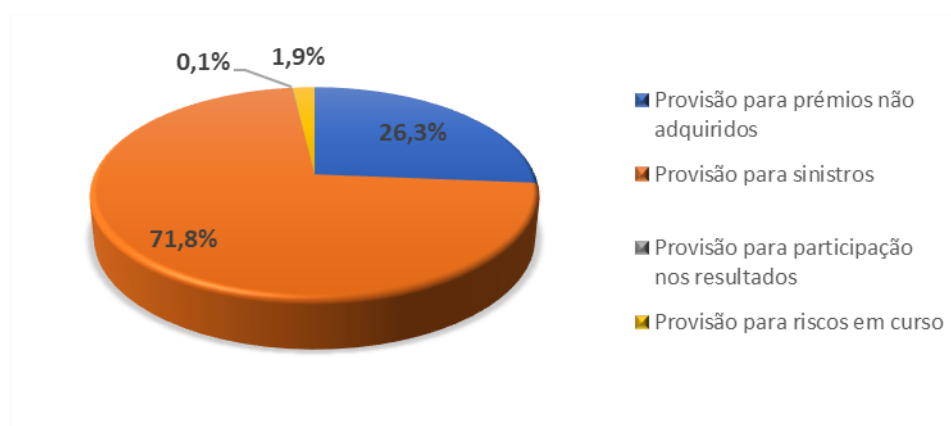


Figura 1 - Distribuição das Provisões Técnicas do Ramo de Automóvel (2019).
Fonte: Elaboração própria com base nos dados da ASF.

Através da Figura 1 pode-se observar a proporção das provisões para sinistros em comparação com as demais provisões do ramo não vida, mais precisamente para o ramo de automóvel, do mercado segurador português, referentes ao ano de 2019.

2.2. SOLVÊNCIA II

No que concerne à solvência, em 2016 entrou em vigor o regime Solvência II, aplicado a seguradoras e resseguradoras da União Europeia, o qual estabelece critérios para a constituição de uma melhor estimativa das provisões técnicas, a fim de reduzir o risco de insolvência dessas entidades.

Conforme discutido por Buckham et al. (2011), aquando das diretivas preparatórias do Solvência II, trata-se de uma revisão fundamental do regime de adequação de capital e que tem o objetivo de garantir a estabilidade financeira das seguradoras, tendo em consideração o montante dos seus ativos e passivos.

Esse novo regime possui uma estrutura de três pilares, a saber:

- Pilar 1, o qual compreende os requisitos quantitativos e consequentemente onde estão inseridas as provisões técnicas e também os investimentos e os requisitos de capital;
- Pilar 2, que engloba os requisitos qualitativos, ou seja, mecanismos de gestão de riscos, controlo interno, funções-chave, ORSA e disposições de supervisão baseada nos riscos;
- Pilar 3, suporta a transparência e disciplina do mercado, cumprindo os requisitos de prestação pública de informação e reporte às entidades supervisoras.

Substituindo o regime anterior, Solvência I, que almejava apenas regular o fluxo financeiro das seguradoras, o atual regime visa não só uma melhoria da supervisão e regulação da atividade seguradora como também unificar o setor segurador do Espaço Económico Europeu para uma avaliação mais consistente dos ativos e passivos, maior alinhamento de exigências regulamentares e a propagação de uma gestão baseada nos riscos.

Dessa forma, e por se tratar de uma atividade obrigatória, ressalta-se a importância da adequada e consistente estimação de provisões técnicas, considerando métodos ou modelos que melhor se ajustem à realidade de cada entidade do mercado segurador.

2.3. MÉTODOS DE ESTIMAÇÃO DAS PROVISÕES

Como explicado anteriormente, a provisão a ser estudada no presente trabalho é a provisão para sinistros e, após análise das metodologias já disponíveis, que podem melhor se adequar aos dados em estudo, essa provisão será estimada através dos métodos determinísticos de *Chain Ladder* e *Bornhuetter-Ferguson* e dos modelos estocásticos de *Thomas Mack* e *Bootstrap*.

Conforme referido por Hindley (2018), o método de *Chain Ladder* baseia-se no uso do padrão de desenvolvimento observado ao longo do tempo, proveniente de sinistros de

coortes anteriores, e assume que esse padrão será observado em coortes posteriores. Ou seja, parte do pressuposto de que existe um padrão estável de montantes a serem pagos com sinistros ao longo dos anos de desenvolvimento.

Além de ser um dos métodos mais utilizados no mercado segurador, tendo sido introduzido por Harnek em 1966 (Taylor, 2000), esse método serve de base para o desenvolvimento de outras metodologias como a de Thomas Mack (1993), a qual produz os mesmos resultados do valor estimado de provisão mas possibilita obter estimativas de erro quadrático médio e com isso medir a variabilidade dos resultados.

Já o método de *Bornhuetter-Ferguson*, segundo Ferreira e Mano (2009), separa os sinistros esperados em sinistros esperados pagos e sinistros esperados não pagos, com base na taxa de sinistralidade, uma vez que os sinistros ocorridos nos primeiros anos já estarão quase todos encerrados hipótese de sinistralidade inicial esperada torna-se gradualmente menos importante.

Os parâmetros de sinistralidade inicial esperada são obtidos pelo rácio entre os prémios adquiridos e os custos com sinistros, e o padrão esperado de pagamentos pode ser obtido com o auxílio do método de *Chain Ladder*.

Finalizando com a técnica de reamostragem de *Bootstrap*, a qual é abordada por vários escritores como England e Verrall (1999) e Kirschner et al. (2008), é um modelo estocástico que, de forma simplificada, pode ser associado ao método de *Chain Ladder* para replicar o triângulo de sinistros pagos através de simulações aleatórias, que se repetem um grande número de vezes afim de obter estimativas das provisões e as medidas de variabilidade associadas a essas.

3 METODOLOGIA

3.1. MÉTODOS DE ESTIMAÇÃO DE PROVISÃO

Para a estimação das provisões para sinistros do Ramo Automóvel, de uma seguradora do mercado, com base na sua informação histórica, é necessário ter dados fiáveis para aferir a evolução da sinistralidade para o futuro. Por não existir um método estatístico padrão para essa projeção, a avaliação da metodologia que melhor se adequa aos dados pode ser feita pelo atuário da Seguradora.

As metodologias existentes para a estimação da provisão para sinistros dividem-se em dois grupos: os métodos determinísticos, que possuem uma aplicação simples, porém eficaz, sem permitir, no entanto, que se obtenha o grau de incerteza dos resultados obtidos; e os modelos estocásticos, que possibilitam a construção de intervalos de confiança a partir da obtenção de estatísticas de erro e, com isso, analisar a qualidade do ajustamento aos dados.

Diante do exposto, no presente estudo serão utilizadas quatro metodologias, para fins de comparação de resultados, são elas: o método determinístico de *Chain Ladder*, devido à sua já utilização por parte da seguradora, o modelo estocástico de *Thomas Mack* por apresentar os mesmos resultados do método *Chain Ladder* porém com o acréscimo da estimativa dos erros de previsão, o método determinístico de *Bornhuetter – Ferguson* por ser um dos mais utilizados para a provisão de sinistros juntamente com o método de *Chain Ladder* e, por fim, o método de *Bootstrapp* que explora o poder computacional atualmente existente para complementar a análise estatística teórica.

3.1.1. Método de Chain Ladder

O método determinístico de *Chain Ladder* é um dos mais conhecidos e utilizados para estimar o montante total de sinistros ocorridos e a respetiva provisão de sinistros, utilizando

a premissa de que existe um padrão estável para o pagamento dos montantes de sinistros para cada ano de desenvolvimento.

Esse método não assume qualquer distribuição de probabilidade e consiste basicamente em: agrupar os dados em formato de uma matriz triangular superior, também denominada por *Run-off*, e posteriormente calcular os factores de desenvolvimento para que sejam observados que padrões seguem e, com isso, estimar os próximos montantes a serem pagos por ano de desenvolvimento com a finalidade de calcular a reserva que deve ser feita pela Companhia.

As premissas básicas do método são:

- I. Proporcionalidade entre os anos desenvolvimento;
- II. Independência entre os períodos de ocorrência;
- III. Estimadores dos factores de desenvolvimento correspondem aos estimadores de variância mínima.

De acordo com Denuit et al. (2008) o princípio básico do método de *Chain Ladder* admite muitas variantes, entretanto apenas o padrão de *Run-off* pode ser capturado, visto que todos os outros factores que têm influência na proporção de montantes pagos permanecem inalterados ao longo do tempo.

O modelo pode ser escrito como:

$$C_{ij+1} = C_{ij} f_j, \quad \text{com } i = 0, \dots, n \text{ e } j = 0, \dots, n - 1$$

onde,

C_{ij} – é o montante de sinistros acumulados para o ano de ocorrência i , até j períodos após o ano de ocorrência;

C_{ij+1} – é o montante de sinistros acumulados para o ano de ocorrência i , até $j+1$ períodos após o ano de ocorrência, e

f_j – é o factor de desenvolvimento entre os períodos de desenvolvimento j e $j+1$.

A partir da matriz de montantes pagos incremental, $I_{i,j}$, em que cada posição (i,j) da matriz contém o montante pago no período j referente a sinistros ocorridos no período i (Figura 2), será estabelecida a matriz de montantes pagos acumulados da seguinte forma:

$$C_{i,j} = \sum_{n=0}^j I_{i,n}$$

		Período de desenvolvimento					
		0	1	2	...	n-1	n
Período de ocorrência	0	$I_{0,0}$	$I_{0,1}$	$I_{0,2}$...	$I_{0,n-1}$	$I_{0,n}$
	1	$I_{1,0}$	$I_{1,1}$	$I_{1,2}$...	$I_{1,n-1}$	
	2	$I_{2,0}$	$I_{2,1}$	$I_{2,2}$...		
	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots			
	n-1	$I_{n-1,0}$	$I_{n-1,1}$				
	n	$I_{n,0}$					

Figura 2 - Matriz de montantes pagos incrementais

A diagonal da matriz de montantes pagos acumulados representa os montantes pagos, até ao momento, referente aos sinistros ocorridos em cada período i . Essa matriz será utilizada para calcular os factores de desenvolvimento definidos como:

$$\hat{f}_j = \frac{\sum_{i=0}^{n-j-1} C_{i,j+1}}{\sum_{i=0}^{n-j-1} C_{i,j}}, \quad \text{com } j=0, \dots, n-1 \quad (3.1.)$$

e

$$\hat{f}_n = \frac{\hat{C}_{0,\infty}}{C_{0,n}}$$

$\hat{C}_{0,\infty}$ pode conter a estimativa dos montantes ainda a pagar aos sinistros ocorridos no período 0 depois do período de desenvolvimento n.

Os factores calculados tornam possível a estimação das provisões para sinistros relacionadas a cada período de ocorrência i por meio da equação (3.2.):

$$\hat{C}_{i,j} = C_{i,n-i} (\hat{f}_{n-i} \cdot \dots \cdot \hat{f}_{j-1}), \quad \text{com } (i,j) \in \Delta \quad (3.2.)$$

onde $\Delta = \{(i,j): n-i+1 \leq j \leq n+1\}$ denota o conjunto dos pares correspondentes aos períodos futuros. Completando, assim, o triângulo inferior da matriz da Figura 2.

A reserva a constituir, ou seja, o montante ainda a ser pago pela seguradora referente aos sinistros ocorridos no ano i, é dado por:

$$\hat{R}_i = \hat{C}_{i,n} - C_{i,n-i} \quad \text{com } i=0,\dots,n \quad (3.3.)$$

Logo, a reserva total será:

$$\hat{R} = \sum_{i=0}^n \hat{R}_i \quad (3.4.)$$

3.1.2. Modelo de Thomas Mack

O modelo de *Thomas Mack* (1993) é um modelo estocástico que permite aferir medidas de variabilidade além das informações que já são obtidas através do método determinístico, podendo também ser classificado como um modelo não paramétrico por não considerar que as variáveis aleatórias sigam uma determinada distribuição de probabilidade.

Com a aplicação da metodologia desse modelo serão estimadas as provisões para os montantes pagos de sinistros, a semelhança do modelo *Chain Ladder*, e a elaboração de um intervalo de confiança que auxilie na análise da variação de estimativas de pagamentos futuros com a percepção de possíveis desvios em relação aos montantes dos anos anteriores.

Após a observação dessas estatísticas, verificar-se-á se os valores provisionados estão dentro dos intervalos de confiança obtido com um nível de confiança pré-definido, e caso estejam poderá ser assumido que esses valores são adequados.

As etapas a seguir para a aplicação do modelo são as seguintes:

Etapa 1 - Verificação dos pressupostos:

O modelo de *Thomas Mack* assume alguns pressupostos a fim de verificar se o mesmo é adequado para a análise dos dados em questão. Caso um ou mais pressupostos sejam rejeitados deverá ser considerada a possibilidade de não aplicar o modelo.

1º Pressuposto

Esse pressuposto testa a existência de proporcionalidade entre os períodos de desenvolvimento com factores individuais de desenvolvimento não correlacionados.

Dessa forma, de acordo com Mack (1993), existem factores de desenvolvimento $f_1, f_2, \dots, f_{n-1} > 0$, com $E(C_{i,j+1} | C_{i,1}, \dots, C_{i,j}) = C_{i,j} f_j$, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n-1$.

Para verificar esse pressuposto, será utilizado o teste de *Spearman* (Rohatgi e Saleh, 2015), que não assume qualquer distribuição para os dados e, a partir da matriz de factores de desenvolvimento individuais $f_{i,j} = C_{i,j+1}/C_{i,j}$, $0 \leq i \leq n-j-1$, constroem-se duas novas matrizes.

A primeira matriz é construída ordenando de forma crescente os respectivos factores individuais, para cada ano de desenvolvimento j , e tem seus números de ordem denominados por $r_{i,j}$, $1 \leq r_{i,j} \leq n-j$.

A segunda matriz é construída ordenando os factores individuais de forma semelhante à matriz anterior, porém para os factores do ano precedente, ou seja, $C_{i,j}/C_{i,j+1}$, e tem seus números de ordem denominados por $s_{i,j}$, $1 \leq s_{i,j} \leq n-j$.

Determina-se então o coeficiente de *Spearman*, T_j , que tem a seguinte formulação:

$$T_j = 1 - 6 \sum_{i=0}^{n-j-1} \frac{(r_{i,j} - s_{i,j})^2}{(n-j)^3 - n-j}, \quad 1 \leq j \leq n-2 \quad (3.5.)$$

onde,

$$-1 \leq T_j \leq 1$$

Um valor de T_j próximo de zero indica a ausência de correlação entre os factores que estão entre os períodos de desenvolvimento $j-1$ e j e os factores que estão entre j e $j+1$. Sendo um valor positivo a indicação de uma correlação positiva e um valor negativo a indicação de uma correlação negativa.

Na ausência de correlação, temos:

$$E(T_j) = 0 \text{ e } V(T_j) = 1 / (n - j - 1)$$

Considerando todo o triângulo de desenvolvimento para calcular a estimativa T e depois obtermos um estimador de variância mínima, têm-se:

$$T = \frac{\sum_{j=1}^{n-2} (n-j-1) T_j}{\sum_{j=1}^{n-2} n-j-1}$$

onde, na hipótese de existência de correlação, temos

$$E(T) = 0 \text{ e } V(T) = \frac{1}{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}$$

Como a distribuição do estimador T_j , com $n-j \geq 10$ se aproxima de uma distribuição Normal e, como T é obtido pela soma ponderada dos T_j 's não correlacionados, pode-se assumir que T segue aproximadamente a Distribuição Normal.

Logo, poderá ser aceite a hipótese de ausência de correlação entre os factores individuais de desenvolvimento, se a estimativa T se situar dentro do intervalo de confiança obtido pela equação (3.6.):

$$\left[-\Phi^{-1} \left(1 - \frac{\alpha}{2} \right) \sqrt{V(T)} ; \Phi^{-1} \left(1 - \frac{\alpha}{2} \right) \sqrt{V(T)} \right] \quad (3.6.)$$

com nível de confiança $100(1-\alpha)\%$, com $\alpha \in]0,1[$, sendo $\Phi^{-1} (1-\alpha/2)$ o quantil de probabilidade $1-\alpha/2$ da distribuição Normal Reduzida.

2º Pressuposto

O segundo pressuposto corresponde à independência entre os períodos de ocorrência, ou seja, de acordo com Mack (1993), como o algoritmo de *Chain Ladder* não tem em consideração nenhuma dependência entre os períodos de acidentes, é assumido implicitamente que os montantes pagos, de diferentes períodos são independentes entre si:

$$(C_{i,1}, \dots, C_{i,n}), (C_{k,1}, \dots, C_{k,n}), 0 \leq i, k \leq n-1 \text{ e } i \neq k \text{ são independentes}$$

Dessa forma, serão observados os factores de desenvolvimento da matriz, em cada período de desenvolvimento, e estes serão separados em dois grupos de forma a conter metade dos factores em cada um.

Um grupo deverá ter os maiores factores e será denominado L, e o outro grupo conterá os restantes factores, ou seja, os menores e será denominado S. Entretanto, ao seguir essa classificação para períodos de desenvolvimento que tenham número ímpar de factores, não se considera o de valor mediano, para que no final tenhamos sempre a mesma quantidade de factores em cada grupo.

Considerando L_j e S_j o número de factores contidos nos grupos L e S, respetivamente, e que possuem distribuição Binomial de parâmetros $n = L_j + S_j$ e $p = 0,5$, o passo seguinte será a soma do número de elementos contidos em cada grupo, para cada diagonal C_j , onde $Z_j = \min(L_j, S_j)$.

Assumindo uma aproximação à distribuição Normal, não se rejeita a hipótese de independência entre os períodos de ocorrência sempre que $Z = \sum_{j=0}^n Z_j$ se situar dentro do intervalo de confiança abaixo:

$$\left[E(Z) - \Phi^{-1} \left(1 - \frac{\alpha}{2} \right) \sqrt{V(Z)} ; E(Z) + \Phi^{-1} \left(1 - \frac{\alpha}{2} \right) \sqrt{V(Z)} \right]$$

onde,

$$E(Z_j) = \frac{n}{2} - \binom{n-1}{m} \frac{n}{2^n}$$

e

$$V(Z_j) = \frac{n(n-1)}{4} - \binom{n-1}{m} \frac{n(n-1)}{2^n} + E(Z_j) - (E(Z_j))^2$$

Com m sendo o maior inteiro menor ou igual a $(n-1)/2$.

Logo,

$$E(Z) = \sum_i E(Z_i) \quad e \quad V(Z) = \sum_i V(Z_i)$$

3º Pressuposto

O último pressuposto verifica se os estimadores dos factores de desenvolvimento correspondem aos estimadores de variância mínima.

Essa análise será feita através da observação gráfica dos resíduos, com a construção dos seguintes pares ordenados:

$$\left(C_{i,j}, \frac{C_{i,j+1} - C_{i,j} \hat{f}_j}{\sqrt{C_{i,j}}} \right)$$

Considerar-se-á o pressuposto como válido se o conjunto de pontos obtidos não apresentar nenhuma tendência.

Etapa 2 - Estimação das reservas através do Método de Chain Ladder, obtidas pelas equações (3.3.) e (3.4.);

Etapa 3 - Cálculo do Erro Padrão (EP) dos Estimadores já obtidos no passo anterior:

$$EP = \sqrt{EQM}$$

onde, EQM = Erro Quadrático Médio, e como,

$$EQM(\hat{R}_i) = E \left((\hat{R}_i - R_i)^2 \mid D \right) = E \left((\hat{C}_{i,n} - C_{i,n})^2 \mid D \right) = EQM(\hat{C}_{i,n})$$

em que D corresponde ao conjunto de dados observados até ao momento, ou seja, $D = \{C_{i,n} \mid i+k \leq n+1\}$, e de acordo com Mack (1993),

$$EQM(\hat{C}_{i,n}) = \hat{C}_{i,n}^2 \sum_{k=n+1-i}^{n-1} \frac{\hat{\sigma}_k^2}{\hat{f}_k^2} \left(\frac{1}{\hat{C}_{i,k}} + \frac{1}{\sum_{j=1}^{n-k} C_{j,k}} \right)$$

sendo $\hat{C}_{i,k}$ a representar os valores futuros estimados de $C_{i,k}$ e $\hat{\sigma}_k^2$ o estimador imparcial de σ_k^2

Logo,

$$\hat{C}_{i,k} = C_{i,n+1-i} \hat{f}_{n+1-i} \cdot \dots \cdot \hat{f}_{n-1}, \quad k > n+1-i$$

e

$$\hat{\sigma}_k^2 = \frac{1}{n-k-1} \sum_{i=1}^{n-k} C_{i,k} \left(\frac{C_{i,k+1}}{C_{i,k}} - \hat{f}_k \right)^2, \quad 1 \leq k \leq n-2 \quad (3.7.)$$

entretanto, como a equação (3.7.) não é válida para $k = n-1$, considera-se que,

$\frac{\hat{\sigma}_{n-3}^2}{\hat{\sigma}_{n-2}^2} = \frac{\hat{\sigma}_{n-2}^2}{\hat{\sigma}_{n-1}^2}$, quando $\hat{\sigma}_{n-3}^2 > \hat{\sigma}_{n-2}^2$. Dessa forma, tem-se que,

$$\hat{\sigma}_{n-1}^2 = \min \left(\frac{\hat{\sigma}_{n-2}^4}{\hat{\sigma}_{n-3}^2}, \min(\hat{\sigma}_{n-3}^2, \hat{\sigma}_{n-2}^2) \right)$$

Etapa 4 - Determinação dos Intervalos de Confiança:

Ao considerar que os estimadores apresentados na etapa 2 assumem a hipótese de normalidade, serão construídos os intervalos de confiança para \hat{R} e \hat{R}_i , a um nível de confiança $1-\alpha$, obtendo-se:

$$\left[\hat{R}_i - \Phi^{-1} \left(1 - \frac{\alpha}{2} \right) \sqrt{EQM(\hat{R}_i)}; \hat{R}_i + \Phi^{-1} \left(1 - \frac{\alpha}{2} \right) \sqrt{EQM(\hat{R}_i)} \right]$$

para cada período de ocorrência e para a reserva total:

$$\left[\hat{R} - \Phi^{-1} \left(1 - \frac{\alpha}{2} \right) \sqrt{EQM(\hat{R})}; \hat{R} + \Phi^{-1} \left(1 - \frac{\alpha}{2} \right) \sqrt{EQM(\hat{R})} \right]$$

3.1.3. Método de Bornhuetter - Ferguson

O método proposto por Bornhuetter-Ferguson (1972), segundo England e Verall (2002), é muito utilizado quando há instabilidade na proporção dos montantes pagos nos primeiros anos de desenvolvimento, situação que faz com que o método de *Chain Ladder*, por exemplo, produza resultados insatisfatórios.

Essa técnica é um processo determinístico que combina o método de *Chain Ladder* com uma medida de sinistralidade esperada para estimar a reserva de sinistros, proposto por Mack (2008). Para isso, de acordo com Ferreira e Mano (2009), torna-se necessário determinar o padrão esperado de pagamentos e a sinistralidade esperada.

O padrão de pagamentos será obtido através do método de *Chain Ladder* conforme descrito na secção 3.1.1, contudo a sinistralidade esperada será definida com base na relação entre os custos da seguradora com os sinistros declarados e os prémios já adquiridos para arcar com esses sinistros.

Logo, para estimar o total dos montantes futuros, por ano de ocorrência, será utilizada a seguinte equação:

$$C_{i,j}^{BF} = x_i p_i \left(1 - \frac{1}{\hat{f}_j}\right)$$

Em que,

x_i – sinistralidade esperada obtida através do cociente entre os custos com sinistros já declarados e os prémios adquiridos;

p_i – prémios adquiridos;

$\hat{f}_j = \prod_{j=1}^n f_j$ – fator de desenvolvimento acumulado obtido pela equação (3.1.).

Dessa forma, o valor total da provisão para sinistros nos n períodos considerados é dado por:

$$\hat{R} = \sum_{i=0}^n C_{i,j}^{BF} - C_{i,n+1-i}$$

3.1.4. Técnica de Bootstrap

O método de *Bootstrap* é um procedimento iterativo que, por meio de simulações de reamostragem, permite a obtenção de estatísticas de interesse e de medidas de variabilidade das estimativas obtidas.

Conforme apresentado por Efron e Tibshirani (1993), esta técnica pode gerar uma distribuição de probabilidade empírica para a provisão de sinistros, levando em consideração um procedimento não paramétrico, ou exigir o conhecimento prévio da distribuição dos dados em estudo utilizando, para isso, um procedimento paramétrico.

De forma simples, o método de *Bootstrap* consiste num processo de reamostragem com reposição, selecionando um conjunto de pseudo-dados a partir de cada reamostragem, a fim de obter um número suficiente de conjuntos e, com isso, aferir o valor da estatística em estudo.

Neste trabalho, essa técnica será utilizada de forma associada com o método de *Chain Ladder* apresentado anteriormente e, conforme descrito por England e Verrall (2002), o procedimento a ser seguido será:

1. Obter os factores de desenvolvimento da matriz de montantes pagos acumulada pelo método de *Chain Ladder*;
2. Estimar uma nova matriz de dados por período de ocorrência utilizando os fatores de desenvolvimento obtidos através da equação (3.1.);
3. Calcular os resíduos de *Pearson* pela diferença entre a matriz observada e a matriz estimada:

$$r_{ij}^{(p)} = \frac{I_{ij} - \hat{m}_{ij}}{\sqrt{\hat{m}_{ij}}}$$

onde, $\hat{m}_{ij} = \hat{E}(I_{i,j})$ é a estimativa dos valores ajustados incrementais obtida na p-ésima simulação do processo de *bootstrapping*, de forma que o resíduo seja padronizado e decorrente de uma distribuição hipotética de probabilidade.

4. Avaliar um parâmetro de escala para os resíduos de *Pearson* ϕ , por:

$$\hat{\phi} = \frac{\sum_{i,j,n-i+1} (r_{ij}^{(p)})^2}{\frac{1}{2}n(n+1) - 2n + 1}$$

com n a representar o número de observações.

5. Por fim, ajustar os resíduos de *Pearson* através da equação:

$$r_{ij}^{(ajus)} = \sqrt{\frac{n}{\frac{1}{2}n(n+1) - 2n + 1}} r_{ij}^{(p)}$$

A segunda parte do processo consiste na aplicação da técnica de reamostragem *Bootstrap*, com os seguintes passos:

- 1 - Gerar a matriz de resíduos, recorrendo à seleção resíduos de *Pearson* ajustados;
- 2 - Construir um novo triângulo incremental, recorrendo a:

$$I_{ij} = r_{ij}^{(p)} \sqrt{\hat{m}_{ij}} + \hat{m}_{ij}$$

- 3 - A partir disso será criado o conjunto de pseudo-dados acumulados correspondente;
- 4 - Aplicar-se-á o método de *Chain Ladder* padrão para serem obtidos os respetivos factores de desenvolvimento e, conseqüentemente, a estimativa da provisão denominada pseudo-reserva.

Os resultados obtidos na etapa 4 serão armazenados e este procedimento será repetido D vezes, ou seja, um número de iterações suficientes para obter uma distribuição empírica com as diversas estimativas da pseudo-reserva e assim poder construir intervalos de confiança e estimar o erro padrão das provisões a constituir.

Para estimar o erro padrão será utilizada a formulação proposta por England e Verall (1999):

$$\widehat{EP}(\hat{R}_i) = \sqrt{\hat{\phi} \hat{R}_i + \frac{n}{n-p} (\widehat{SE}(\hat{R}_i))^2}, 0 \leq i \leq n$$

e

$$\widehat{EP}(\hat{R}) = \sqrt{\hat{\phi} \hat{R} + \frac{n}{n-p} (\widehat{SE}(\hat{R}))^2}$$

onde ϕ representa o parâmetro de dispersão, n se refere ao número de observações, p representa o número de parâmetros a estimar e pode ser apurado por $p = 2n-1$ e, \widehat{SE} simboliza a estimativa do erro padrão de cada estimador para a amostra simulada:

$$\widehat{SE}(\hat{R}_i) = \sqrt{\frac{1}{D} \sum_{d=1}^D (\hat{R}_{i(d)} - \hat{R}_{i(\cdot)})^2}, 0 \leq i \leq n$$

e para reserva total:

$$\widehat{SE}(\hat{R}) = \sqrt{\frac{1}{D} \sum_{d=1}^D (\hat{R}_{(d)} - \hat{R}_{(\cdot)})^2}$$

em que $\hat{R}_{i(\cdot)}$ e $\hat{R}_{(\cdot)}$ dizem respeito à média das D simulações de $\hat{R}_{i(d)}$ e $\hat{R}_{(d)}$, respetivamente.

3.1.5. Factor Cauda

Alguns ramos de seguro, como por exemplo o Ramo Automóvel, possuem montantes a serem pagos depois de n períodos de desenvolvimento conhecidos, relativamente a sinistros

ocorridos num dado período i e que ainda não estão encerrados. Esta situação deve ser considerada na estimação da evolução dos montantes totais futuros para não levar a estimativas de reserva pouco adequadas à realidade da Companhia.

Desse modo, é necessário incorporar um factor cauda, \hat{f}_n , ao triângulo *Run-off* considerando os pagamentos por liquidar entre os períodos de desenvolvimento $n + 1$ e $n + j$, com j a representar qualquer instante de tempo, de forma a assegurar uma estimação mais precisa.

Uma das formas de aproximação para estimar o factor cauda, de acordo com Borginho (2001), é relacionar os valores de $\ln(\hat{f}_j - 1)$ por uma reta na forma $y = aj + b$, $a < 0$, com o seu estimador adquirido através de:

$$\hat{f}_n = \prod_{j=n}^{\infty} \hat{f}_j$$

Entretanto, qualquer que seja o método de estimação escolhido pelo atuário, é necessária uma análise dos resultados obtidos a fim de que reflita os valores reais futuros.

Neste trabalho irá ser considerado que os sinistros se encontram regularizados dentro dos períodos considerados, pelo que não será aplicado factor cauda.

3.1.6. Inflação

A inflação, por definição, refere-se a uma variação positiva no nível geral dos preços de bens e serviços e, em Portugal, é medida através da taxa de variação do Índice de Preços no Consumidor. Todavia, podem ocorrer também variações negativas e essas são denominadas de deflação.

Ao estimar o montante de pagamento dos sinistros futuros, pode ser necessário considerar o efeito da taxa de inflação no provisionamento, uma vez que a sua volatilidade

causa variações nos custos com sinistros, e os resultados obtidos podem apresentar distorções e induzir ao erro.

Dessa forma, o factor inflação é incorporado em cada ano de pagamento do triângulo incremental e, em seguida, é refeita a estimação dos valores da provisão a constituir de forma a refletir o impacto da inflação sobre as estimativas dos montantes a pagar de sinistros pela Seguradora.

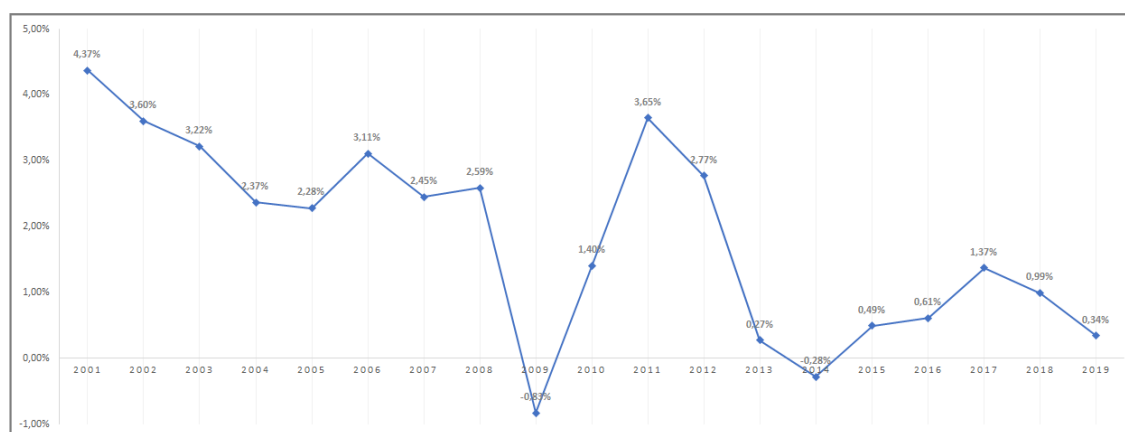


Figura 3 - Taxa de Inflação em Portugal. Fonte: Elaboração própria com base nos dados de INE.

Apesar da aparente volatilidade na evolução da taxa de inflação em Portugal nos últimos anos, conforme pode ser observado na Figura 3, neste trabalho a mesma não será implementada, uma vez que através do histórico da Companhia para os dados em estudo, testou-se que esta variação não resulta em grande impacto na provisão da reserva de sinistros.

3.2. APLICAÇÃO PRÁTICA

Os dados utilizados foram fornecidos por uma Seguradora do mercado português, desde o ano de 2000 até 2019, referentes aos valores de montantes pagos de sinistros para uma carteira de automóvel que possui uma informação histórica ordenada por ano na forma de uma matriz triangular superior com cauda longa. Contudo, de modo a assegurar a confidencialidade da empresa, aplicou-se um factor sobre os dados originais.

Com base nessa informação serão aplicadas as metodologias apresentadas anteriormente, para a estimação da provisão para sinistros. O *software* que será utilizado para testar os métodos determinísticos é o Excel e para os modelos estocásticos é o RCRAN, recorrendo ao package ChainLadder (versão 0.2.11) e às funções MackChainLadder e BootChainLadder.

3.2.1. Método de Chain Ladder

Na Tabela 1 pode-se observar os dados relativos à matriz de montantes pagos acumulados para o ramo de automóvel entre os anos de 2000 a 2019:

(milhares de €)																				
Período de Ocorrência	Período de Desenvolvimento																			
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
2000	28.838	40.787	40.578	40.388	40.462	40.419	40.372	40.387	40.446	40.439	40.424	40.425	40.397	40.398	40.399	40.396	40.396	40.396	40.396	40.397
2001	32.732	44.993	44.808	44.519	44.497	44.500	44.518	44.490	44.488	44.483	44.484	44.486	44.517	44.518	44.518	44.519	44.519	44.519	44.519	44.519
2002	33.946	46.616	46.372	46.223	46.231	46.238	46.241	46.255	46.252	46.249	46.251	46.252	46.254	46.254	46.254	46.254	46.254	46.254	46.254	46.254
2003	41.690	54.869	54.736	54.592	54.575	54.657	54.775	54.793	54.795	54.800	54.802	54.803	54.806	54.806	54.805	54.805	54.805	54.805	54.805	54.805
2004	39.378	50.910	50.821	50.679	50.779	50.783	50.777	50.838	50.835	50.838	50.832	50.832	50.832	50.838	50.838	50.838	50.839			
2005	41.434	53.899	53.721	53.693	53.627	53.689	53.724	53.723	53.733	53.740	53.758	54.046	54.053	54.053	54.053	54.053				
2006	40.283	53.991	53.748	53.683	53.823	53.864	53.899	53.909	53.979	53.975	53.981	53.981	53.981	53.982	53.982					
2007	44.063	57.855	57.699	57.766	57.716	57.705	57.784	57.760	57.760	57.746	57.748	57.749	57.749							
2008	52.229	68.198	68.514	68.617	68.712	68.678	68.721	68.705	68.714	68.713	68.717	68.717								
2009	61.418	86.794	87.024	87.439	87.577	87.665	87.761	87.743	87.734	87.734	87.744	87.744								
2010	75.447	100.409	100.806	100.836	101.041	101.191	101.213	101.268	101.303	101.320										
2011	78.116	100.805	100.942	101.172	101.387	101.413	101.689	101.702	101.690											
2012	77.388	97.882	98.608	99.344	99.911	100.134	100.147	100.212												
2013	73.757	92.460	93.113	93.901	94.437	94.773	94.888													
2014	69.671	88.687	89.186	89.510	89.680	89.908														
2015	65.902	85.195	85.883	86.468	86.827															
2016	71.819	94.848	96.043	96.584																
2017	63.791	92.922	93.459																	
2018	67.863	94.175																		
2019	71.389																			

Tabela 1 - Montantes pagos acumulados

A partir da matriz de montantes pagos acumulados, foram calculados os factores de desenvolvimento:

j	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
f_j	1,326991	1,003003	1,002302	1,002171	1,001115	1,000836	1,000190	1,000202	1,000001	1,000040
j	10	11	12	13	14	15	16	17	18	
f_j	1,000629	1,000035	1,000030	1,000004	0,999992	1,000000	1,000000	1,000005	1,000023	

Tabela 2 - Estimativa dos factores de desenvolvimento

Como pode ser observado na Tabela 2, os primeiros quatro anos possuem os maiores factores de desenvolvimento dentro do período analisado, e os demais anos, apesar de possuírem factores mais próximos de 1, demonstram um pequeno decréscimo dos montantes que foram pagos no período quinze em comparação com o período quatorze.

Com os valores encontrados para os factores de desenvolvimento, foram calculados os montantes de responsabilidade total em cada período de ocorrência (*Ultimate*), bem como a estimativa para a provisão para sinistros a constituir pelo método de *Chain Ladder* (Reserva).

Período de Ocorrência	Período de Desenvolvimento																			(milhares de €)
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
2000	28.838	40.787	40.508	40.388	40.462	40.419	40.372	40.387	40.446	40.439	40.424	40.425	40.397	40.398	40.399	40.396	40.396	40.396	40.396	40.397
2001	32.732	44.993	44.808	44.519	44.497	44.500	44.518	44.490	44.488	44.483	44.484	44.486	44.517	44.518	44.518	44.519	44.519	44.519	44.519	44.520
2002	33.946	46.616	46.372	46.223	46.231	46.238	46.241	46.255	46.252	46.249	46.251	46.252	46.254	46.254	46.254	46.254	46.254	46.254	46.255	46.256
2003	41.690	54.869	54.736	54.592	54.575	54.657	54.775	54.793	54.795	54.800	54.802	54.803	54.806	54.806	54.805	54.805	54.805	54.805	54.805	54.807
2004	39.378	50.910	50.821	50.679	50.779	50.783	50.777	50.838	50.835	50.838	50.832	50.832	50.832	50.838	50.838	50.839	50.839	50.839	50.839	50.840
2005	41.434	53.899	53.721	53.693	53.627	53.689	53.724	53.723	53.733	53.740	53.758	54.046	54.053	54.053	54.053	54.053	54.053	54.053	54.053	54.054
2006	40.283	53.991	53.748	53.683	53.823	53.864	53.899	53.909	53.979	53.975	53.981	53.981	53.982	53.983	53.983	53.983	53.983	53.983	53.983	53.985
2007	44.063	57.855	57.699	57.766	57.716	57.705	57.784	57.760	57.760	57.746	57.748	57.749	57.749	57.751	57.751	57.751	57.751	57.751	57.751	57.752
2008	52.229	68.198	68.514	68.617	68.712	68.678	68.721	68.705	68.714	68.713	68.717	68.717	68.720	68.722	68.722	68.722	68.722	68.722	68.722	68.724
2009	61.418	86.794	87.024	87.439	87.577	87.665	87.761	87.743	87.734	87.734	87.744	87.799	87.802	87.805	87.805	87.805	87.805	87.805	87.805	87.807
2010	75.447	100.409	100.806	100.836	101.041	101.191	101.213	101.268	101.303	101.320	101.324	101.388	101.391	101.394	101.395	101.394	101.394	101.394	101.394	101.397
2011	78.116	100.805	100.942	101.172	101.387	101.413	101.689	101.702	101.690	101.690	101.694	101.758	101.762	101.765	101.765	101.764	101.764	101.764	101.765	101.767
2012	77.388	97.882	98.608	99.344	99.911	100.134	100.147	100.212	100.232	100.232	100.236	100.299	100.303	100.306	100.306	100.306	100.306	100.306	100.306	100.308
2013	73.757	92.460	93.113	93.901	94.437	94.773	94.888	94.906	94.925	94.925	94.929	94.989	94.992	94.995	94.995	94.994	94.994	94.994	94.995	94.997
2014	69.671	88.687	89.186	89.510	89.680	89.908	89.983	90.001	90.019	90.019	90.022	90.079	90.082	90.085	90.085	90.085	90.085	90.085	90.085	90.087
2015	65.902	85.195	85.883	86.468	86.827	86.924	86.997	87.013	87.031	87.031	87.035	87.089	87.092	87.095	87.095	87.095	87.095	87.095	87.095	87.097
2016	71.819	94.848	96.043	96.584	96.794	96.902	96.983	97.001	97.021	97.021	97.025	97.086	97.089	97.092	97.093	97.092	97.092	97.092	97.092	97.094
2017	63.791	92.922	93.459	93.675	93.878	93.983	94.061	94.079	94.098	94.098	94.102	94.161	94.164	94.167	94.168	94.167	94.167	94.167	94.167	94.170
2018	67.863	94.175	94.458	94.675	94.881	94.986	95.066	95.084	95.103	95.103	95.107	95.167	95.170	95.173	95.173	95.173	95.173	95.173	95.173	95.175
2019	71.389	94.732	95.017	95.235	95.442	95.549	95.628	95.647	95.666	95.666	95.670	95.730	95.733	95.736	95.737	95.736	95.736	95.736	95.736	95.739

Tabela 3 - Montantes acumulados para cada período de ocorrência

Apresenta-se também na Tabela 4 o montante acumulado pago até ao momento, para cada período de ocorrência do sinistro (*Latest*):

(em €)

Período de Ocorrência	Latest	Ultimate	Reserva
2000	40 397 417	40 397 417	0
2001	44 519 388	44 520 415	1 027
2002	46 254 371	46 255 646	1 275
2003	54 805 060	54 806 571	1 511
2004	50 838 759	50 840 165	1 406
2005	54 053 024	54 054 114	1 090
2006	53 983 260	53 984 565	1 305
2007	57 748 958	57 752 112	3 154
2008	68 717 335	68 723 523	6 188
2009	87 743 880	87 806 959	63 079
2010	101 319 828	101 396 688	76 860
2011	101 690 014	101 767 300	77 286
2012	100 211 911	100 308 287	96 376
2013	94 887 713	94 997 057	109 344
2014	89 908 276	90 087 131	178 855
2015	86 827 364	87 097 086	269 722
2016	96 584 129	97 094 470	510 341
2017	93 459 412	94 169 521	710 109
2018	94 174 922	95 175 387	1 000 465
2019	71 388 800	95 738 662	24 349 862
Total	1 489 513 821	1 516 973 077	27 459 257

Tabela 4 - Reserva total estimada

Logo, conforme pode ser observado na Tabela 4 é possível concluir que, pelo método de *Chain Ladder*, o valor total da reserva estimada que a Seguradora deverá constituir para fazer face ao passivo relativo aos sinistros ainda não pagos em 2019 é cerca de 27,459 milhões de euros.

3.2.2. Modelo de Thomas Mack

Como o modelo de *Thomas Mack* exige a verificação de três pressupostos, conforme descrito na secção 3.1.2., a primeira análise dos resultados será feita com os mesmos, a fim de verificar a adequação do modelo aos dados em estudo.

Validação do 1º Pressuposto

A análise inicial será feita através da seguinte observação gráfica:

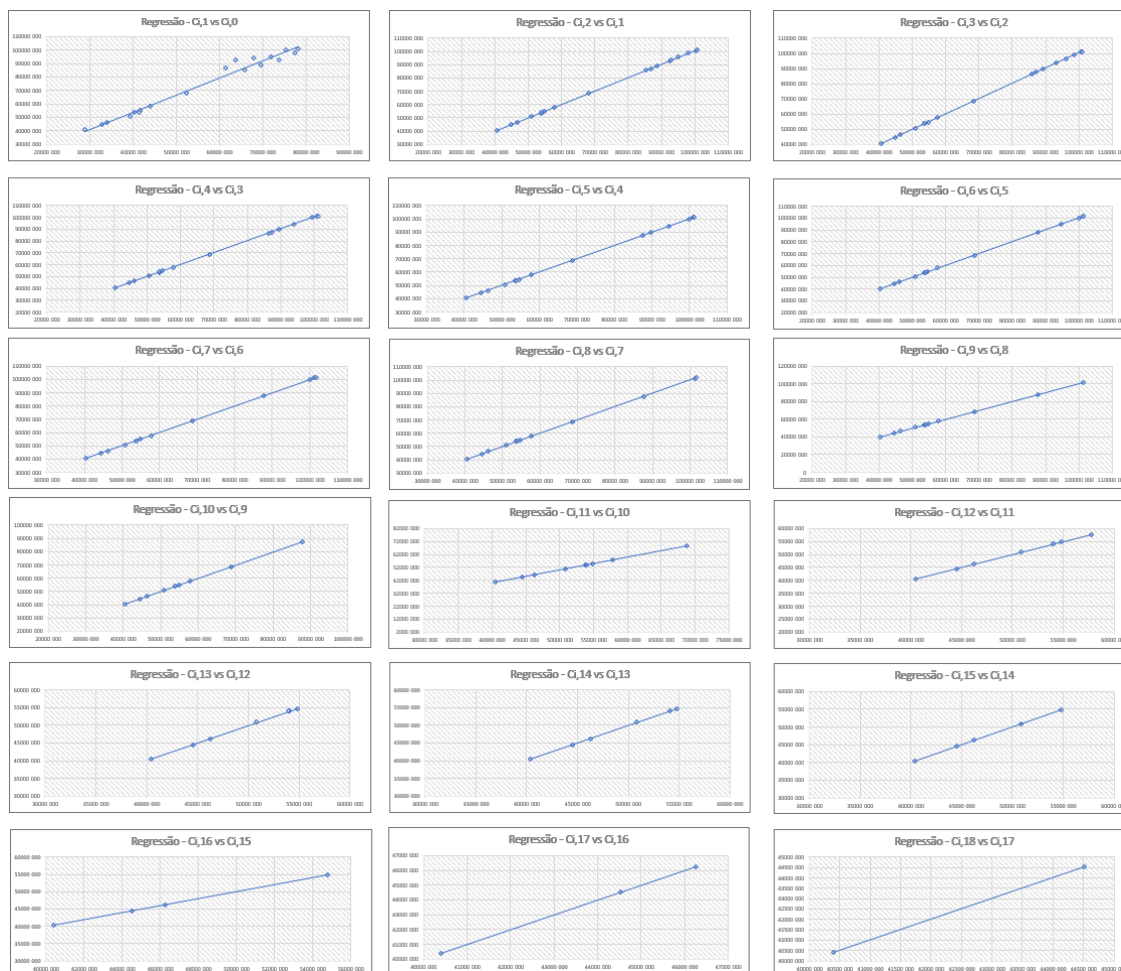


Figura 4 - Análise Gráfica de Regressão

Ao analisar os gráficos da Figura 4 é possível notar que as retas de declive f_j se ajustam de forma bastante aceitável aos dados e, por tanto, podemos assumir a existência de uma relação linear implícita ao primeiro pressuposto, verificando-se assim a existência de proporcionalidade entre os anos de desenvolvimento.

Entretanto, ainda é necessário analisar a condição de existência de factores de desenvolvimento individuais não correlacionados. Para isso, inicialmente foi calculada a matriz de factores de desenvolvimento individuais:

Período de Ocorrência	Período de Desenvolvimento																		
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
2000	1,414373	0,994871	0,995322	1,001814	0,998955	0,998827	1,000383	1,001440	0,999847	0,999608	1,000036	0,999307	1,000035	1,000028	0,999926	1,000000	1,000000	1,000000	1,000023
2001	1,374562	0,995892	0,993560	0,999494	1,000076	1,000396	0,999373	0,999963	0,999881	1,000028	1,000044	1,000689	1,000024	1,000016	1,000014	1,000000	1,000000	1,000000	1,000009
2002	1,373221	0,994771	0,996795	1,000176	1,000148	1,000066	1,000290	0,999935	0,999939	1,000042	1,000032	1,000040	1,000005	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	
2003	1,316132	0,997582	0,997357	0,999697	1,001503	1,002153	1,000326	1,000036	1,000088	1,000048	1,000025	1,000042	1,000007	0,999980	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	
2004	1,292874	0,998244	0,997208	1,001973	1,000075	0,999896	1,001196	0,999939	1,000065	0,999872	1,000009	0,999992	1,000115	1,000009	1,000011				
2005	1,300858	0,996691	0,999475	0,998779	1,001152	1,000646	0,999996	1,000175	1,000138	1,000335	1,005358	1,000125	1,000000	1,000000	1,000000				
2006	1,340289	0,995491	0,998796	1,002607	1,000770	1,000640	1,000199	1,001287	0,999937	1,000103	0,999996	1,000016	1,000030						
2007	1,313020	0,997302	1,001155	0,999129	0,999812	1,001370	0,999589	0,999993	0,999764	1,000031	1,000015	1,000005							
2008	1,305751	1,004637	1,001512	1,001372	0,999513	1,000618	0,999770	1,000128	0,999999	1,000045	1,000011								
2009	1,413175	1,002652	1,004768	1,001580	1,001001	1,001100	0,999791	0,999895	0,999999	1,000118									
2010	1,330857	1,003953	1,000300	1,002029	1,001491	1,000216	1,000536	1,000349	1,000167										
2011	1,290453	1,001355	1,002287	1,002121	1,000255	1,002727	1,000126	0,999880											
2012	1,264826	1,007416	1,007461	1,005708	1,002232	1,000135	1,000647												
2013	1,253575	1,007062	1,008465	1,005713	1,003560	1,001206													
2014	1,272948	1,005624	1,003629	1,001898	1,002547														
2015	1,292749	1,008072	1,006819	1,004152															
2016	1,320665	1,012592	1,005637																
2017	1,456655	1,005788																	
2018	1,387721																		

Tabela 5 - Matriz de factores de desenvolvimento individuais

De acordo com o Teste de *Spearman*, a partir dos resultados da Tabela 5 foram obtidos os seguintes números de ordem $r_{i,j}$:

Período de Ocorrência	Período de Desenvolvimento																			
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
2000		2	2	8	1	1	10	12	2	1	7	1	6	6	1	1	1	1	1	
2001		4	1	3	5	6	1	5	3	3	8	8	4	5	5	1	1	2		
2002		1	3	5	6	3	8	3	5	5	6	5	2	2	2	1	1			
2003		7	5	4	12	13	9	7	9	7	5	6	3	1	2	4				
2004		8	4	10	4	2	13	4	8	2	2	2	7	4	4					
2005		5	7	1	10	9	5	9	10	10	9	7	1	2						
2006		3	6	13	8	8	7	11	4	8	1	4	5							
2007		6	9	2	3	12	2	6	1	4	4	3								
2008		12	10	6	2	7	3	8	6	6	3									
2009		10	13	7	9	10	4	2	7	9										
2010		11	8	11	11	5	11	10	11											
2011		9	11	12	7	14	6	1												
2012		16	16	15	13	4	12													
2013		15	17	16	15	11														
2014		13	12	9	14															
2015			17	15																
2016		18	14																	
2017		14																		
2018																				

Tabela 6 - Matriz de número de ordem $r_{i,j}$

De modo análogo, foram obtidos os números de ordem dos factores de desenvolvimento individuais precedentes:

Período de Ocorrência	Período de Desenvolvimento																			
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
2000		17	2	2	8	1	1	10	11	2	1	6	1	5	5	1	1	1	1	
2001		15	4	1	3	5	6	1	4	3	3	7	7	4	4	4	1	1		
2002		14	1	3	5	6	3	8	2	5	5	5	4	2	2	2	1			
2003		10	7	5	4	12	12	9	6	9	7	4	5	3	1	2				
2004		6	8	4	10	4	2	12	3	8	2	2	2	6	3					
2005		7	5	7	1	10	9	5	8	10	9	8	6	1						
2006		13	3	6	13	8	8	7	10	4	8	1	3							
2007		9	6	9	2	3	11	2	5	1	4	3								
2008		8	12	10	6	2	7	3	7	6	6									
2009		16	10	13	7	9	10	4	1	7										
2010		12	11	8	11	11	5	11	9											
2011		4	9	11	12	7	13	6												
2012		2	15	15	14	13	4													
2013		1	14	16	15	14														
2014		3	13	12	9															
2015		5	16	14																
2016		11	17																	
2017		18																		
2018																				

Tabela 7 - Matriz de número de ordem $s_{i,j}$

Os valores estimados para T_j , ou seja, os coeficientes de correlação de *Spearman*, definidos pela equação (3.5.):

j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
$T(j)$	-0,47	0,88	0,58	0,41	0,35	-0,54	0,24	-0,01	0,58	-0,03	0,52	-0,71	0,69	0,05	-0,40	1,00	0,00

Tabela 8 - Coeficientes de Correlação de Spearman

Com isso, obtém-se a estimativa final:

$$t_{\text{obs}} = 0,19496$$

e, na hipótese de ausência de correlações, tem-se:

$$E(T) = 0 \text{ e } V(T) = 0,00654$$

Dessa forma, o intervalo de confiança a 50%, para a estimativa T , é:

$$[-0,05453 ; 0,05453]$$

E a 95%, é:

$$[-0,15846 ; 0,15846]$$

Como a estimativa T não se encontra dentro do intervalo de confiança a 50% nem a 95%, rejeita-se a hipótese de ausência de correlação entre os factores individuais de desenvolvimento adjacentes.

Entretanto, apesar do primeiro pressuposto ter sido rejeitado, como referido anteriormente, é válida uma análise mais apurada dos demais fatores que impactam nos dados. Dessa forma, foi dada continuidade a estimativa dos demais pressupostos e resultados do modelo.

Validação do 2º Pressuposto

A análise seguinte testará a independência dos dados entre os períodos de ocorrência.

Conforme explicado na secção 3.1.2., para validar o segundo pressuposto do modelo é necessário agrupar os factores de desenvolvimento em dois grupos, S e L, a fim de analisar por coluna, quais factores pertencem a cada grupo, além de desprezar os de factores medianos, representado por “*” como pode ser visto na Tabela 9.

Período de Ocorrência	Período de Desenvolvimento																		
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
2000	L	S	S	S	S	S	L	L	S	S	L	S	L	L	S	S	L	S	*
2001	L	S	S	S	S	S	S	S	S	S	L	L	*	L	L	S	*	L	
2002	L	S	S	S	S	S	L	S	S	S	L	L	S	S	*	L	S		
2003	*	S	S	S	L	L	L	L	L	L	*	L	S	S	S	L			
2004	S	S	S	L	S	S	L	S	L	S	S	S	L	L	L				
2005	S	S	S	S	L	L	S	L	L	L	L	L	S	S					
2006	L	S	S	L	*	L	*	L	S	L	S	S	L						
2007	S	S	*	S	S	L	S	S	S	S	S	S							
2008	S	L	L	S	S	S	S	L	*	L	S								
2009	L	L	L	S	L	L	S	S	L	L									
2010	L	L	S	L	L	S	L	L	L										
2011	S	S	L	L	S	L	S												
2012	S	L	L	L	L	S	L												
2013	S	L	L	L	L														
2014	S	L	L	L	L														
2015	S	L	L	L															
2016	L	L	L																
2017	L	L																	
2018	L																		
2019																			

Tabela 9 - Grupo a que pertence $f_{i,j}$

Considerando C_j , $0 < j < 18$ uma das diagonais da tabela acima e, sendo S_j o número de factores do grupo S e L_j o número de factores do grupo L, onde ambos pertencem a C_j , foram obtidas as seguintes estatísticas:

j	S _j	L _j	Z _j	(S _j + L _j)/2	n	m	E(Z _j)	V(Z _j)
0	0	1	0	0,5	1	0	0,00	0,00
1	1	1	1	1	2	0	0,50	0,25
2	2	1	1	1,5	3	1	0,75	0,19
3	3	0	0	1,5	3	1	0,75	0,19
4	5	0	0	2,5	5	2	1,56	0,37
5	6	0	0	3	6	2	2,06	0,62
6	5	2	2	3,5	7	3	2,41	0,55
7	5	3	3	4	8	3	2,91	0,80
8	7	2	2	4,5	9	4	3,27	0,74
9	4	5	4	4,5	9	4	3,27	0,74
10	3	7	3	5	10	4	3,77	0,99
11	7	5	5	6	12	5	4,65	1,17
12	5	7	5	6	12	5	4,65	1,17
13	4	8	4	6	12	5	4,65	1,17
14	7	8	7	7,5	15	7	5,93	1,28
15	9	7	7	8	16	7	6,43	1,53
16	5	10	5	7,5	15	7	5,93	1,28
17	7	10	7	8,5	17	8	6,83	1,46
18	5	13	5	9	18	8	7,33	1,71
Total			61				67,63	16,21

Tabela 10 - Momentos das variáveis Z_j e Z

logo, o intervalo de confiança a 95% obtido para Z, definido na secção 3.1.2, é:

$$[59,74285 ; 75,52503]$$

E como $z_{obs} = 61$ se encontra dentro do intervalo de confiança calculado, não se rejeita a hipótese de independência entre os períodos de ocorrência, com uma probabilidade de erro de 5%.

Validação do 3º Pressuposto

O último pressuposto verifica se os estimadores dos factores de desenvolvimento correspondem aos estimadores de variância mínima e, para isso foram obtidos os seguintes gráficos de pares ordenados dos resíduos:

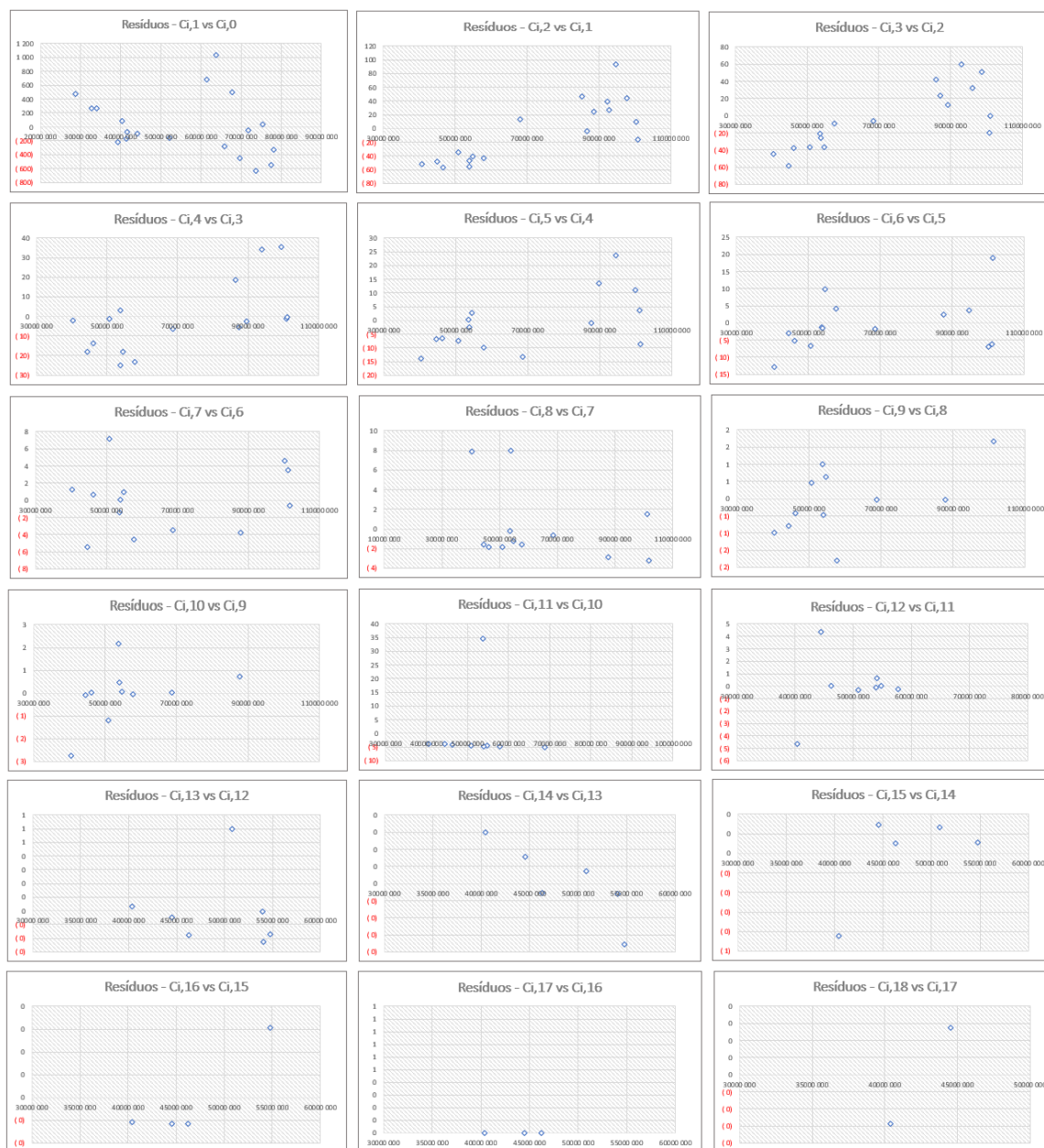


Figura 5 - Resíduos Ponderados

É possível perceber através da Figura 5 que existe uma aleatoriedade entre cada conjunto de dados, ou seja, uma dispersão entre os resíduos, o que indica que não há uma tendência e, dessa forma, considera-se o terceiro pressuposto como validado.

Entretanto, uma vez que a condição de ausência de correlação entre os factores individuais de desenvolvimento adjacentes, relativa ao primeiro pressuposto, não foi satisfeita, podemos concluir que nem todos os pressupostos do Modelo de Mack se verificam satisfatoriamente ao conjunto de dados em estudo.

De seguida, após serem obtidas as estimativas de reserva através do método de *Chain Ladder*, será calculado o Erro Padrão a fim de medir a variabilidade da estimativa da reserva para cada período de ocorrência e da reserva total.

(em €)		
Período de Ocorrência	Reserva Estimada	Erro Padrão
2000	0	0
2001	1 027	0
2002	1 275	335
2003	1 511	376
2004	1 406	357
2005	1 090	1 960
2006	1 305	2 150
2007	3 154	3 220
2008	6 188	22 000
2009	63 078	135 000
2010	76 860	148 000
2011	77 286	149 000
2012	96 376	153 000
2013	109 344	153 000
2014	178 855	168 000
2015	269 722	195 000
2016	510 341	277 000
2017	710 109	454 000
2018	1 000 465	644 000
2019	24 349 862	3 860 000
TOTAL	27 459 253	4 039 862

Tabela 11 - Resultados do Modelo de Mack

Através da Tabela 11 é possível observar que a estimativa da reserva total é de 27 459 253 euros e que o erro padrão relacionado com a mesma é de 4 039 862 euros.

Com isso, são calculados os limites inferior e superior do intervalo de confiança a 95%:

(em €)		
Período de Ocorrência	Limite Inferior	Limite Superior
2000	0	0
2001	1 027	1 027
2002	618	1 932
2003	774	2 248
2004	706	2 106
2005	-2 752	4 932
2006	-2 909	5 519
2007	-3 157	9 465
2008	-36 932	49 308
2009	-201 522	327 678
2010	-213 220	366 940
2011	-214 754	369 326
2012	-203 504	396 256
2013	-190 536	409 224
2014	-150 425	508 135
2015	-112 478	651 922
2016	-32 579	1 053 261
2017	-179 731	1 599 949
2018	-261 775	2 262 705
2019	16 784 262	31 915 462
TOTAL	19 541 123	35 377 383

Tabela 12 - Intervalo de Confiança do Modelo Mack

logo, o intervalo de confiança a 95% associado à reserva total estimada é [19 541 123 ; 35 377 383].

3.2.3. Método de Bornhuetter – Ferguson

Para o cálculo da reserva por esse método, é necessário calcular a taxa de sinistralidade com base nos prémios adquiridos, em euros, pela Companhia referentes ao respetivo período de ocorrência:

(em €)	
Período de Ocorrência	Prémios Adquiridos
2000	41 310 225
2001	44 591 386
2002	46 668 605
2003	56 418 931
2004	57 492 951
2005	58 641 879
2006	64 454 133
2007	64 899 737
2008	68 211 316
2009	93 209 893
2010	91 823 708
2011	98 790 851
2012	107 876 303
2013	102 134 405
2014	99 835 332
2015	101 977 579
2016	112 365 296
2017	124 989 643
2018	137 085 556
2019	161 815 325

Tabela 13 - Prémios Adquiridos

Conforme descrito na secção 3.1.3, a partir da taxa de sinistralidade calculada juntamente com o padrão de pagamentos obtidos com a aplicação no método de *Chain Ladder*, foram obtidas as seguintes taxas de sinistralidade estimadas:

Período de Ocorrência	Taxa de Sinistralidade
2000	97,8%
2001	99,8%
2002	99,1%
2003	97,1%
2004	88,4%
2005	92,2%
2006	83,8%
2007	89,0%
2008	100,8%
2009	94,2%
2010	110,4%
2011	103,0%
2012	93,0%
2013	93,0%
2014	90,2%
2015	85,4%
2016	86,4%
2017	75,3%
2018	69,4%
2019	59,6%

Tabela 14 - Taxa de sinistralidade estimada

Dessa forma, a taxa de sinistralidade final estimada é de 87.5%. E, com isso, é provisionada a reserva por período de ocorrência e total:

(em €)	
Período de Ocorrência	Reserva
2000	0
2001	1 027
2002	1 275
2003	1 511
2004	1 406
2005	1 090
2006	1 305
2007	3 154
2008	6 188
2009	63 079
2010	76 860
2011	77 286
2012	96 376
2013	109 344
2014	178 855
2015	269 722
2016	510 341
2017	710 109
2018	1 000 465
2019	24 349 862
Total	27 459 257

Tabela 15 - Reserva estimada pelo método de Bornhuetter – Ferguson

Através da Tabela 15 é possível observar que a estimativa da reserva total, pelo método de *Bornhuetter – Ferguson*, é de 27 459 257 euros, montante esse similar aos valores obtidos pelos métodos anteriores.

3.2.4. Técnica de Bootstrap

Os dados utilizados para a aplicação dessa técnica são os mesmos disponíveis na Tabela 1, que dizem respeito aos montantes pagos acumulados para o período de ocorrência entre 2000 e 2019. A técnica de *Bootstrap* é aplicada de forma associada à distribuição Gama, por ter sido a distribuição que melhor se adere aos dados em estudo, a fim de se obter a provisão média de sinistros e a respetiva variabilidade:

Período de Ocorrência	Período de Desenvolvimento																			
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
2000	-259	741	-1.053	-1.029	-52	-456	-490	99	615	-913	-484	-167	-862	6	83	-171	-2	0	-15	0
2001	-89	473	-966	-1.356	-424	-230	-112	-438	-124	-747	-13	-172	811	-9	43	59	-2	0	14	
2002	-103	459	-1.139	-867	-322	-218	-201	54	-142	-395	3	-179	6	-35	-15	21	-2	0		
2003	143	-56	-812	-845	-434	95	373	81	-96	595	10	-197	9	-35	-99	22	6			
2004	264	-272	-686	-839	-33	-246	-257	575	-146	422	-211	-195	-58	121	20	54				
2005	197	-218	-937	-478	-591	8	-54	-115	-16	923	379	1.528	123	-45	-16					
2006	5	167	-1.117	-593	76	-84	-55	5	622	-436	81	-205	-27	-1						
2007	169	-85	-877	-199	-549	-328	156	-367	-124	-1.675	-11	-206	-43							
2008	152	-213	275	-149	-156	-441	-69	-280	-48	-19	7	-226								
2009	-556	950	-67	530	-131	-35	95	-301	-224	-19	129									
2010	-21	53	193	-464	-34	125	-239	279	116	1.543										
2011	284	-473	-334	-4	-12	-287	729	-52	-253											
2012	332	-888	869	1.173	834	370	-269	367												
2013	385	-1.027	773	1.359	811	786	138													
2014	338	-697	495	288	-62	449														
2015	132	-467	934	961	437															
2016	-76	-147	1.869	752																
2017	-850	1.427	541																	
2018	-409	714																		
2019	0																			

Tabela 16 - Resíduos ajustados de Pearson

A matriz com os resíduos ajustados de *pearson*, disponível na Tabela 16, é um exemplo dos resíduos utilizados para simular novas matrizes de pseudo-dados e, a partir disso, serem calculadas as provisões.

Período de Ocorrência	Período de Desenvolvimento																			(em €)
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
2000	28 698 759	6 343 069	146 304	81 572	7 798	208 752	-103 465	8 209	-30 118	1 338	-16 025	111 529	-16 448	10 867	239	-14 911	-414	0	7 341	530
2001	41 418 261	15 938 967	125 392	104 459	33 961	211 629	26 406	26 580	19 942	132	15 942	157 307	-9 216	23 264	2 436	-1 291	-26	0	-23 533	
2002	31 939 627	10 676 074	438 149	87 993	334 193	63 764	-140 752	20 558	23 071	-57	32 423	24 505	-6 356	-6 772	5 358	-4 624	570	0		
2003	39 870 019	12 739 895	-252 464	274 483	167 385	212 602	3 998	156 115	98 690	916	1 441	-56 424	29 348	13 073	5 755	-1 376	219			
2004	37 909 642	11 439 249	71 183	-454 680	-45 083	85 192	30 942	82 582	72 421	-979	-8 033	15 961	20 341	38 924	-5 048	-229				
2005	42 747 885	13 189 785	198 563	173 588	24 836	-57 162	-310 597	-2 334	-80 573	-221	-20 520	5 216	18 745	-2 233	-6 502					
2006	34 782 287	13 455 517	163 839	-30 500	97 759	36 583	33 496	38 117	9 234	-412	23 373	-54 174	1 818	3 823						
2007	43 999 089	21 095 017	173 662	134 083	178 500	57 412	47 330	-39 149	-20 804	-2 524	-4 489	-2 973	-10 119							
2008	53 621 736	16 579 806	-1 817	54 193	316 683	68 990	278 448	44 493	13 583	-1 886	-870	44 224								
2009	64 784 210	26 835 106	260 879	199 681	188 660	86 568	-41 538	113 893	-16 463	1 987	45 626									
2010	78 111 508	25 194 106	117 903	633 249	139 164	113 625	-132 719	-16 374	21 648	-3 216										
2011	74 743 110	24 082 395	264 494	583 978	657 813	240 683	74 745	17 653	-25 550											
2012	76 467 133	24 199 943	587 532	134 625	576 483	35 985	-213 386	-84 128												
2013	67 128 302	23 033 932	-264 520	12 966	242 009	40 822	31 255													
2014	66 668 007	22 508 895	409 823	466 870	82 786	-174 166														
2015	54 015 938	20 040 707	261 321	177 758	189 271															
2016	72 473 049	23 509 042	495 040	226 752																
2017	68 823 016	23 561 558	-176 414																	
2018	61 555 691	22 998 186																		
2019	67 469 816																			

Tabela 17 - Simulação de Matriz Incremental

A Tabela 17 representa uma das matrizes de montantes pagos incrementais, em euros, simuladas pela técnica de reamostragem de *bootstrap*, considerando os resíduos de *pearson* já ajustados.

(em €)		
Período de Ocorrência	Reserva Média Estimada	Erro Padrão
2000	0	0
2001	-77	48 670
2002	1 836	61 704
2003	381	69 572
2004	2 555	103 934
2005	-2 896	60 740
2006	-481	74 944
2007	-1 037	103 819
2008	-3 824	118 744
2009	50 704	189 874
2010	62 018	211 880
2011	46 481	228 094
2012	73 188	245 947
2013	82 797	240 007
2014	148 301	276 134
2015	231 013	300 368
2016	461 987	404 035
2017	637 884	464 766
2018	899 477	513 407
2019	24 223 650	3 083 678
TOTAL	26 913 959	3 404 423

Tabela 18 - Resultados da Técnica de Bootstrap

Como pode ser observado na Tabela 18, após 1 000 simulações de reamostragem, o valor médio resultante da estimativa da provisão é de 26 913 959 euros, com um erro padrão de 3 404 423 euros.

(em €)		
Período de Ocorrência	Limite Inferior	Limite Superior
2000	0	0
2001	-95 468	95 315
2002	-119 101	122 773
2003	-135 978	136 740
2004	-201 152	206 262
2005	-121 945	116 153
2006	-147 370	146 407
2007	-204 518	202 445
2008	-236 559	228 911
2009	-321 443	422 851
2010	-353 260	477 296
2011	-400 575	493 537
2012	-408 859	555 234
2013	-387 609	553 203
2014	-392 911	689 513
2015	-357 698	819 723
2016	-329 908	1 253 882
2017	-273 041	1 548 808
2018	-106 783	1 905 736
2019	18 179 752	30 267 548
TOTAL	20 241 413	33 586 505

Tabela 19 - Intervalo de Confiança para a Técnica de Bootstrap

Através dos resultados da Tabela 19, é possível observar que o intervalo de confiança a 95% associado à estimativa do valor esperado de reserva total é [20 241 413 ; 33 586 505].

(em €)					
Período de Ocorrência	Quantil 50%	Quantil 75%	Quantil 95%	Quantil 99%	Quantil 99.5%
2000	0	0	0	0	0
2001	0	0	8 997	121 025	273 491
2002	0	0	26 549	217 142	312 649
2003	0	1	28 581	214 571	288 903
2004	0	1	33 025	311 696	565 758
2005	0	2	37 690	191 641	248 625
2006	0	13	37 906	262 406	407 724
2007	0	559	118 932	334 147	460 757
2008	0	1 509	110 501	433 602	563 131
2009	6 137	84 797	372 590	683 943	896 813
2010	13 291	118 734	446 646	841 139	965 745
2011	10 212	97 522	456 188	807 250	913 488
2012	25 366	146 369	482 137	975 919	1 049 610
2013	32 221	151 122	497 258	981 778	1 056 035
2014	77 253	238 667	660 380	1 128 540	1 199 547
2015	166 551	356 194	765 216	1 364 812	1 589 558
2016	388 019	655 244	1 215 489	1 807 663	2 033 332
2017	561 533	884 677	1 534 965	2 192 791	2 347 420
2018	832 331	1 208 644	1 823 327	2 445 859	2 808 721
2019	24 052 890	26 175 270	29 725 289	31 679 134	33 356 141
TOTAL	26 741 136	29 131 478	32 873 373	35 300 322	36 034 409

Tabela 20 - Resultados dos Quantis

A partir dos valores apresentados na Tabela 20 tem-se que 95% das reservas simuladas para o conjunto de dados em estudo se encontram abaixo de 32 873 373 euros e, de forma similar, 50% das reservas simuladas estão abaixo de 26 741 136 euros.

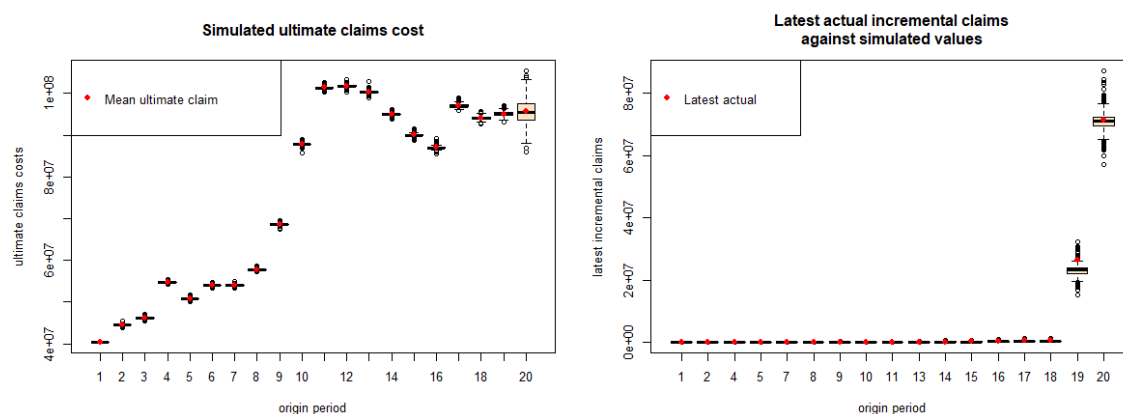


Figura 6 - Ajuste do modelo aos dados

A análise do ajuste do modelo aos dados pode ser feita através da Figura 6, output do *software* RCRAN com a aplicação da função *BootChainLadder*, onde é possível perceber que os *boxplots* apenas apresentam *outliers* para os anos de ocorrência mais recentes, como é expectável.

Entretanto é possível observar juntamente com a tabela 17, que para os dois últimos anos de desenvolvimento o modelo estima um maior valor com pagamento de sinistros relativos ao primeiro ano de ocorrência e pagamento de reembolsos relativos ao segundo ano de ocorrência, quando comparados com a matriz incremental original.

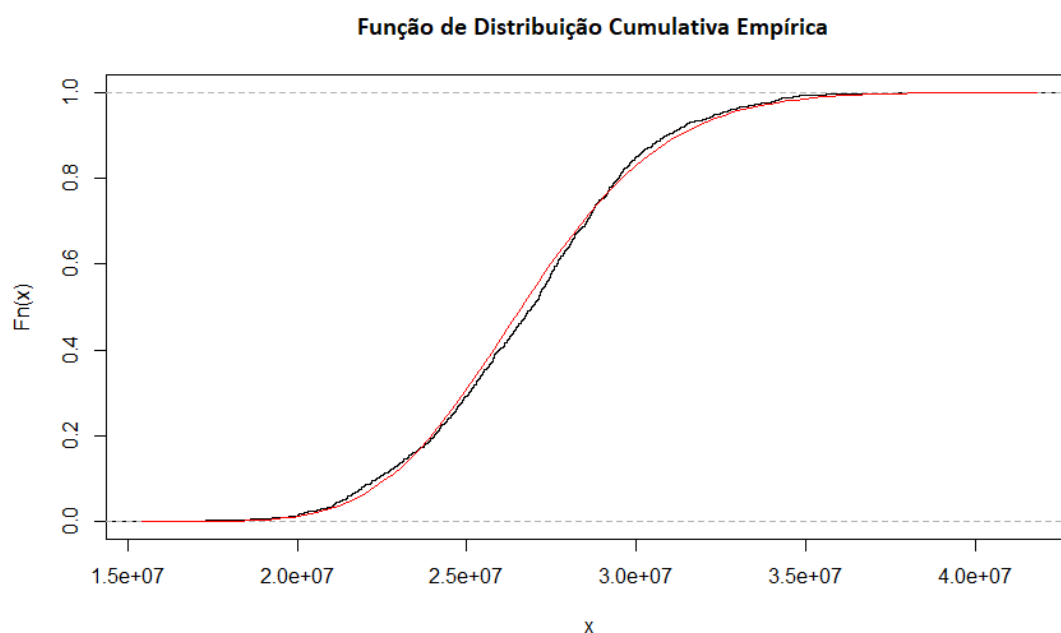


Figura 7 - Ajuste da distribuição Log-normal aos dados

Com a Figura 7 é possível perceber a aderência da reserva estimada (curva preta) a distribuição log-normal (curva vermelha), ou seja, os dados em estudo se aproximam de uma distribuição log-normal com parâmetros $\mu = 17.100122447$ e $\sigma = 0.127151060$.

Com a aplicação do teste de *Kolmogorov-Smirnov* obtém-se um p-value de 0.2384, não se rejeitando a hipótese da amostra ser oriunda de uma população com distribuição log-normal.

4 CONCLUSÃO

A estabilidade financeira de uma Seguradora é de extrema importância para reduzir o seu risco de insolvência e, conseqüentemente, garantir o cumprimento das suas obrigações para com os seus clientes. Dessa forma, é necessária a constituição de uma melhor estimativa das obrigações futuras da empresa, considerando a metodologia que melhor se adeque à realidade dos respectivos dados.

Com base nisso, o objetivo geral do trabalho foi estimar e analisar os valores das provisões para sinistros, do ramo automóvel, de uma Seguradora do mercado através de metodologias determinísticas e estocásticas. E, com isso, responder à pergunta: está a Seguradora a provisionar corretamente os sinistros que estão declarados e não estão totalmente regularizados e os sinistros que ocorreram e não foram declarados?

Para melhor comparar os resultados obtidos neste estudo com os aferidos pela Seguradora, apresenta-se a tabela abaixo:

(em €)				
Período de Ocorrência	Seguradora	Chain Ladder/Thomas Mack	Bornhuetter – Ferguson	Bootstrap
2000	0	0	0	0
2001	0	1 027	1 027	-77
2002	0	1 275	1 275	1 836
2003	0	1 511	1 511	381
2004	0	1 406	1 406	2 555
2005	-405	1 090	1 090	-2 896
2006	-188	1 305	1 305	-481
2007	1 522	3 154	3 154	-1 037
2008	4 326	6 188	6 188	-3 824
2009	80 734	63 079	63 079	50 704
2010	101 987	76 860	76 860	62 018
2011	104 075	77 286	77 286	46 481
2012	122 095	96 376	96 376	73 188
2013	129 196	109 344	109 344	82 797
2014	214 276	178 855	178 855	148 301
2015	366 399	269 722	269 722	231 013
2016	755 927	510 341	510 341	461 987
2017	1 267 019	710 109	710 109	637 884
2018	2 019 853	1 000 465	1 000 465	899 477
2019	25 463 908	24 349 862	24 349 862	24 223 650
Total	30 630 722	27 459 257	27 459 257	26 913 959

Tabela 21 - Comparação dos Resultados das Reservas

A partir da Tabela 21, podemos concluir que os valores da reserva total apurados pelas quatro metodologias estão próximos do valor apurado pela Seguradora, entretanto quando analisamos os resultados por período de ocorrência, para os dez anos mais recentes a reserva calculada pela Seguradora parece estar superestimada e, para os demais anos, subestimada.

Por outro lado, ao analisar a aderência dos dados às metodologias, os mesmos não se mostram adequados à técnica de *Bootstrap*, por apresentar um erro padrão muito elevado para quase todos os anos em estudo juntamente com a projeção de muitos reembolsos (valores negativos na matriz de *run-off*), e também não se aderem por completo ao modelo de *Thomas Mack*, por não ter sido verificado um dos seus pressupostos.

Como os pressupostos do modelo de *Thomas Mack* são aplicáveis também para o método de *Chain Ladder*, e o regime de Solvência II exige uma avaliação consistente do passivo, considerando o grau de incerteza e com isso a variabilidade dos resultados obtidos, os modelos determinísticos escolhidos não se mostram os mais adequados aos dados em análise, pelo que recorremos aos modelos estocásticos.

Com isso, analisa-se também os seguintes intervalos de confiança a 95%:

Período de Ocorrência	(em €)			
	Thomas Mack		Bootstrap	
	Limite Inferior	Limite Superior	Limite Inferior	Limite Superior
2000	0	0	0	0
2001	1027	1027	-95468	95315
2002	618	1932	-119101	122773
2003	774	2248	-135978	136740
2004	706	2106	-201152	206262
2005	-2752	4932	-121945	116153
2006	-2909	5519	-147370	146407
2007	-3157	9465	-204518	202445
2008	-36932	49308	-236559	228911
2009	-201522	327678	-321443	422851
2010	-213220	366940	-353260	477296
2011	-214754	369326	-400575	493537
2012	-203504	396256	-408859	555234
2013	-190536	409224	-387609	553203
2014	-150425	508135	-392911	689513
2015	-112478	651922	-357698	819723
2016	-32579	1053261	-329908	1253882
2017	-179731	1599949	-273041	1548808
2018	-261775	2262705	-106783	1905736
2019	16784262	31915462	18179752	30267548
Total	19 541 123	35 377 383	20 241 413	33 586 505

Tabela 22 - Comparação dos Intervalos de Confiança

Através dos resultados apresentados na Tabela 22, é possível perceber que o valor da reserva aferida pela Seguradora de 30 630 722 euros se encontra dentro dos intervalos de confiança calculados. Conclusão essa ratificada pela Tabela 20 que mostra que 95% das reservas simuladas através do modelo de *Bootstrap* se encontram abaixo de 32 873 373 euros.

Logo, de forma conservadora, a Seguradora está a provisionar corretamente os sinistros que estão declarados e não estão totalmente regularizados e os sinistros que ocorreram e não foram declarados, ou seja, não sugerimos a liberação do montante da reserva que ultrapassa os valores estimados neste estudo.

Vale salientar que os modelos propostos utilizam dados históricos e que estão sujeitos à variação devido a factores externos e internos como, por exemplo, variações nas taxas de inflação ou alterações nos desenhos dos produtos. Dessa forma, cabe ao atuário da empresa tomar a decisão final com base na realidade que a mesma está inserida.

5 BIBLIOGRAFIA

- ASF, 2020, Página da Autoridade de Supervisão de Seguros e Fundos de Pensão (URL: <https://www.asf.com.pt/>, consulta em 25-10-2020)
- Borginho, H., 2001, Metodologias Estocásticas de Estimação de Provisões para Sinistros. Relatório de estágio curricular, Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade Nova de Lisboa.
- Buckham, D., Rose, S., e Wahl, J., 2011, Executive's Guide to Solvency II (New Jersey: John Wiley & Sons, Inc.).
- Denuit, M., Dhaene, J., Goovaerts, M., and Kaas, C., 2008, Modern Actuarial Risk Theory using R (2ª ed) (Berlin: Springer).
- Efron, B. & Tibshirani, R. J., 1993, An Introduction to the bootstrap (New York: Chapman and Hall).
- England, P. D. e Verrall, R. J., 1999, Analytic and Bootstrap Estimates of Prediction Errors in Claims Reserving, Insurance: Mathematics and Economics (25ª ed), pp. 281 - 293.
- England, P. D., & Verrall, R. J., 2002, Stochastic claims reserving in general insurance. British Actuarial Journal, 8(3), p443-518.
- Ferreira, P. P., Mano, C. C. A., 2009, Aspectos Atuariais e Contábeis das Provisões Técnicas (Rio de Janeiro: Escola Nacional de Seguros – Funenseg).
- Gama, E., 2020, Introdução ao Estudo do Seguro (Rio de Janeiro: Autografia Edição e Comunicação Ltda.).

Hindley, D., 2018, Claims Reserving in General Insurance (Cambridge: Cambridge University Press).

INE, 2020, Página do Instituto Nacional de estatística (URL: <https://www.ine.pt/>, consultada em 09-08-2020)

ISP (2012), Provisões Técnicas, Norma Regulamentar nº 019/1994 de junho de 2012.

Kirschner, G. S., Kerley, C., e Isaacs, B., 2008, Two Approaches to Calculating Correlated Reserve Indications Across Multiple Lines of Business. *Variance*, 2 (1), pp.15–38.

Mack, T., 1993, Distribution-Free Calculation of the Standard Error of Chain Ladder Reserve Estimates, *Astin Bulletin*, Vol. 23, nº 2, pp.213-225.

Mack, T., 2008, The Prediction Error of Bornhuetter/Ferguson, *Astin Bulletin* 38, pp.87-103.

Ministério das Finanças. Regime de acesso e exercício da actividade seguradora (1994). Decreto Lei nº 102/1994, de 20 de abril de 1994, *Diário da República – I Série A*, de 20 de abril de 1994.

R Core Team, 2020, R: A language and environment for statistical computing (versão 4.0.5) [Software] (Vienna, Austria: R Foundation for Statistical Computing).

Rohatgi, V. K., Ehsanes Saleh, A. K. Md., 2015, An Introduction to probability and statistics (3ª ed) (New Jersey: John Wiley & Sons).

Taylor, G., 2000, Loss Reserving – An Actuarial Perspective, Kluwer Academic Publishers.

